

# Étude de la sensibilité au champ de base d'un écoulement de coin

FRÉDÉRIC ALIZARD<sup>\*+</sup>, JEAN-CHRISTOPHE ROBINET<sup>\*</sup> & ULRICH RIST<sup>+</sup>

<sup>\*</sup>SINUMEF, ENSAM Paris, France ; <sup>+</sup>IAG, Universität Stuttgart, Germany

## Résumé :

*La stabilité d'un écoulement formé par l'intersection de deux plaques planes perpendiculaires est revisitée à travers une étude de la sensibilité au champ de base. Une technique d'optimisation montre qu'une faible déviation du champ de référence au niveau de la zone d'incertitude induit un net recul du nombre de Reynolds critique. Une hypothèse basée sur le déclenchement d'un mécanisme inflexionnel est ainsi proposée pour expliquer les résultats expérimentaux.*

## Abstract :

*The stability of a flow formed by the intersection of two perpendicular flat plates is revisited through a study of the sensitivity to the base flow. An optimization technique shows that a small deviation of the reference field in the area of uncertainty leads to a decrease in critical Reynolds number. A hypothesis based on the onset of an inflectional mechanism is thus proposed to explain the experimental results.*

**Mots clefs :** Couche limite, Stabilité, Sensibilité

## 1 Introduction

La compréhension de la transition vers la turbulence d'un écoulement formé par l'intersection de deux plaques planes perpendiculaires reste encore mal comprise. Il s'avère notamment que les études expérimentales ont révélé un nombre de Reynolds transitionnel largement inférieur au classique nombre de Reynolds critique de la couche limite de plaque plane de Blasius. En outre, les expérimentateurs ont observé une très grande sensibilité du champ aux paramètres extérieurs conduisant à une large diversité des résultats [1]. Une zone d'incertitude propre au champ de base apparaît alors au niveau de l'intersection pouvant conduire à une déviation de ce dernier par rapport à celui provenant des équations de similitude du coin [2] (voir figure 1).

Les premières études théoriques de stabilité prenant en compte le caractère fortement inhomogène suivant deux directions d'espace dans une section de l'écoulement n'ont jusqu'à présent pas été en mesure d'expliquer les résultats expérimentaux [3]. Néanmoins, elles mettent en évidence la présence de deux ondes d'instabilité au sein d'un tel écoulement. Des ondes de type Tollmien-Schlichting et une relative à un mécanisme non-visqueux, fortement localisée au niveau du coin, expliquée par l'apparition d'un point d'inflexion sur le profil de vitesse proche de l'intersection [4].

Il paraît ainsi intéressant d'étudier ce problème sous un nouvel aspect, en prenant en compte la sensibilité au champ de base dans l'analyse de stabilité. De telles études ont été particulièrement pertinentes pour expliquer les différences théoriques et expérimentales d'écoulements monodimensionnels [5] ou encore récemment dans le contrôle d'instationnarité globale par modification du champ de base [6].

En particulier, nous verrons qu'une technique d'optimisation, basée sur le calcul d'une fonction de sensibilité dépendante du mode direct et adjoint et la définition d'un petit paramètre relatif à la déviation du champ, met en évidence un net avancement du nombre de Reynolds critique associé à un mécanisme propre au coin. Un mode non-visqueux, distinct des classiques ondes de Tollmien-Schlichting, pourrait être en mesure d'expliquer les résultats expérimentaux. Notre analyse s'axera ainsi suivant trois axes majeurs. Nous pouvons préciser que cette dernière s'appuiera sur une solution des équations de similitude du coin pour l'obtention du champ de base de référence [2].

Dans un premier temps, une étude de stabilité linéaire temporelle illustrera les différents modes pouvant intervenir dans la dynamique spatio-temporelle de la perturbation. Puis, une analyse des fonctions de sensibilité révélera les zones sensibles aux variations du champ de base. Enfin, une méthode variationnelle permettra d'émettre une hypothèse associant la diminution du nombre de Reynolds critique avec le déclenchement d'un mécanisme non-visqueux émergeant d'une faible déviation du champ de référence au niveau de la zone d'incertitude.

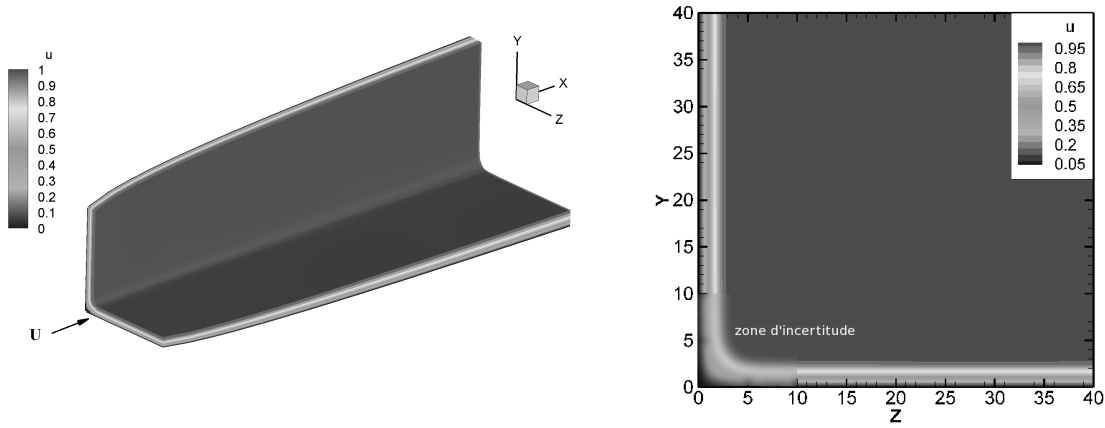


FIG. 1 – Champ de base issu des équations de similitude et zone d'incertitude.

## 2 Analyse de stabilité linéaire temporelle

Les équations de Navier-Stokes sont linéarisées en considérant la forme suivante pour la perturbation :  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{u}}(y, z) e^{i(\alpha x - \Omega t)}$ ,  $p(x, y, z, t) = \hat{p}(y, z) e^{i(\alpha x - \Omega t)}$  où  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$  est solution du système aux dérivées partielles :  $\mathcal{L}(\{\Omega, \hat{\mathbf{q}}\}, \mathbf{U}) = 0$  avec  $\hat{\mathbf{q}} = {}^t(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$  et

$$\mathcal{L} \begin{cases} -i\Omega \hat{u} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) U + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \hat{u} + i\alpha \hat{p} - 1/\sqrt{2Re_x} \nabla^2 \hat{u} \\ -i\Omega \hat{v} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) V + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \hat{v} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} - 1/\sqrt{2Re_x} \nabla^2 \hat{v} \\ -i\Omega \hat{w} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) W + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \hat{w} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} - 1/\sqrt{2Re_x} \nabla^2 \hat{w} \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (1)$$

où  $\nabla = {}^t \left( i\alpha, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  et  $Re_x$  est basé sur la distance au bord d'attaque.  $\Omega_i$  désigne ici le taux d'amplification temporelle,  $\Omega_r$  la pulsation et  $\alpha$  le nombre d'onde. Compte tenu des symétries du problème par rapport à la bissectrice, nous pouvons diviser l'espace des modes en deux catégories :

Modes symétriques :

$$\begin{cases} \hat{u}(z, y) = \hat{u}(y, z), \hat{v}(z, y) = \hat{w}(y, z) \\ \hat{w}(z, y) = \hat{v}(y, z), \hat{p}(z, y) = \hat{p}(y, z) \end{cases}$$

Modes anti-symétriques :

$$\begin{cases} \hat{u}(z, y) = -\hat{u}(y, z), \hat{v}(z, y) = -\hat{w}(y, z) \\ \hat{w}(z, y) = -\hat{v}(y, z), \hat{p}(z, y) = -\hat{p}(y, z) \end{cases}$$

De ce fait, l'étude de stabilité temporelle se résume à la résolution d'un large problème aux valeurs propres sur le domaine  $\mathcal{D} = \{(y, z) / y < z\}$ , où les éléments propres sont définis par le couple  $(\Omega, \hat{\mathbf{q}})$ . Une méthode de collocation spectrale reposant sur une base de polynômes de Chebyshev associée à une technique de résolution de type Arnoldi autorise une résolution efficace du problème précédent. Un exemple de spectre à  $Re_x = 2.5 \times 10^5$  est représenté sur la figure 2. Une branche d'ondes tridimensionnelles de Tollmien-Schlichting à différent nombre d'onde transverse, c'est-à-dire possédant différents angles obliques,

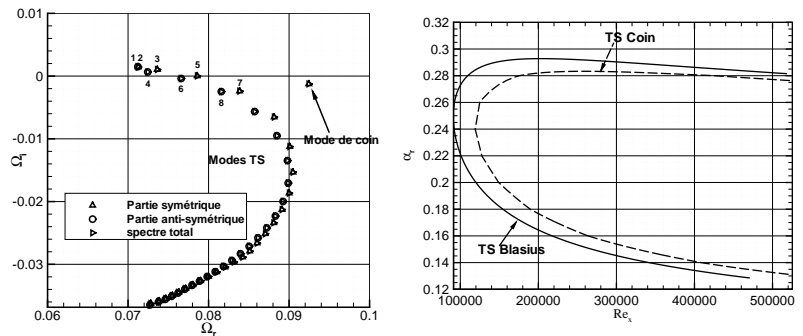


FIG. 2 – A gauche, spectre temporel pour  $Re_x = 2.5 \times 10^5$  et  $\alpha = 0.2$ . La partie symétrique et anti-symétrique du spectre compose la totalité des modes temporels. A droite, courbe neutre relative au mode TS le plus instable. Une comparaison avec une analyse sur une couche limite de Blasius est référencée en trait plein.

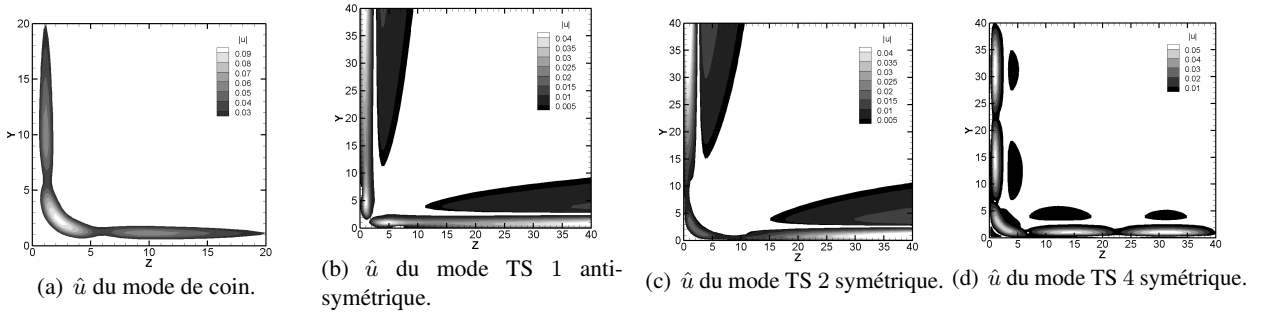


FIG. 3 – Fonctions propres associées au spectre illustré figure 2.

se distingue ainsi qu'un mode relativement isolé fortement concentré au niveau du coin (voir figures 2,3). Une analyse dans l'espace des paramètres  $(\alpha, Re_x)$  indique un comportement relativement similaire à celui observé dans une précédente étude par [3]. En particulier, la dynamique instable est gouvernée par les ondes de Tollmien-Schlichting, le mode de coin (mode symétrique) étant quant à lui stable dans l'espace des paramètres considérés. Cette étude ne permettant pas d'expliquer les résultats expérimentaux et ne prenant pas en compte les incertitudes liées au champ de base, une analyse de sensibilité à ce dernier est réalisée dans la prochaine partie.

### 3 Étude de sensibilité

#### 3.1 Fonction de sensibilité au champ de base

Les variations d'une valeur propre, notées  $\delta\Omega$ , suivant une faible déviation du champ de base, référencée par  $\delta\mathbf{U} = {}^t(\delta U, \delta V, \delta W)$ , sont analysées via l'introduction d'une fonction de sensibilité caractérisée par :

$$\delta\Omega(\mathbf{U}) = \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} {}^t\mathbf{G}_\mathbf{U} \delta\mathbf{U} \, dydz \quad (2)$$

$\mathbf{G}_\mathbf{U}$  peut ainsi être par déterminée par l'évaluation du gradient de  $\Omega$  suivant le champ de base  $\mathbf{U}$ , et où le couple  $(\mathbf{U}, \Omega)$  satisfait le problème aux valeurs propres (1). Une approche variationnelle, classiquement utilisée en théorie du contrôle optimal, est ici employée pour évaluer cette dernière. Nous introduisons dans un premier temps le produit scalaire :  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \bar{\mathbf{p}}^t \mathbf{B} \mathbf{q} \, dydz, \text{ avec } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Il vient alors que le calcul de  $\mathbf{G}_\mathbf{U}$  peut être déterminé par le calcul du gradient de la fonctionnelle Lagrangienne  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\mathbf{Q}) = \Omega(\mathbf{U}) - \langle \mathbf{q}^+, \mathcal{L}(\{\Omega, \hat{\mathbf{q}}\}, \mathbf{U}) \rangle \\ \mathbf{Q} = (\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{q}, \mathbf{q}^+) \end{cases} \quad (4)$$

où le respect de  $\mathcal{L}(\{\Omega, \hat{\mathbf{q}}\}) = 0$  est introduit via le multiplicateur de Lagrange  $\mathbf{q}^+ = (\mathbf{u}^+, p^+)$ . La variable de contrôle est alors égale à  $\mathbf{U}$ , les variables d'état sont  $(\Omega, \mathbf{q})$ ,  $\mathbf{q}^+$  désignent les variables adjointes et enfin  $\Omega(\mathbf{U})$  la fonction objectif. Nous sommes alors amenés à calculer les gradient de la Lagrangienne suivant ces dernières. Dans la suite de l'étude, la variation de  $\mathcal{F}$  par rapport à une variable  $\mathbf{Q}$  est définie par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\mathbf{Q} + \varepsilon \delta\mathbf{Q}) - \mathcal{F}(\mathbf{Q})}{\varepsilon} \quad (5)$$

avec  $\delta\mathbf{Q}$  choisi de manière arbitraire. De ce fait, les variations de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\mathbf{q}^+$  et  $\mathbf{q}$  permettent une détermination des systèmes direct et adjoint ainsi que les conditions limites respectives dont les modes directs et adjoints sont solutions. Enfin la variation suivant la variable de contrôle fournit une formulation analytique

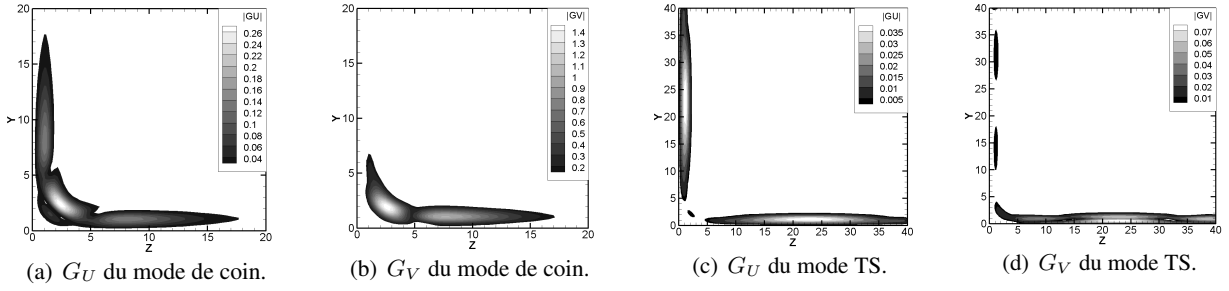


FIG. 4 – Fonctions de sensibilité associées au mode de coin et TS.  $Re_x = 8 \times 10^4$  et  $\alpha = 0.18$ .  $G_w$  se déduit par symétrie le long de la bissectrice.

de la fonction de sensibilité. Celle-ci a pour expression :

$$\begin{aligned} \delta\Omega(\mathbf{U}) - \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \overline{\hat{u}^+} \left( \delta U i \alpha \hat{u} + \delta V \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \delta W \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + \hat{v} \frac{\partial \delta U}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial \delta U}{\partial z} \right) + \\ \overline{\hat{v}^+} \left( \delta U i \alpha \hat{v} + \delta V \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \delta W \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} + \hat{v} \frac{\partial \delta V}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial \delta V}{\partial z} \right) + \\ \overline{\hat{w}^+} \left( \delta U i \alpha \hat{w} + \delta V \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \delta W \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + \hat{v} \frac{\partial \delta W}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial \delta W}{\partial z} \right) dy dz = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Après intégration par parties de (6), la fonction de sensibilité s'écrit :

$$\mathbf{G_U} = \begin{pmatrix} G_U \\ G_V \\ G_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\alpha \hat{u} \overline{\hat{u}^+} + i\alpha \hat{v} \overline{\hat{v}^+} + i\alpha \hat{w} \overline{\hat{w}^+} - \frac{\partial \hat{v} \overline{\hat{u}^+}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{w} \overline{\hat{u}^+}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \overline{\hat{u}^+} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \overline{\hat{v}^+} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \overline{\hat{w}^+} - \frac{\partial \hat{v} \overline{\hat{v}^+}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{w} \overline{\hat{v}^+}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \overline{\hat{u}^+} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \overline{\hat{v}^+} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \overline{\hat{w}^+} - \frac{\partial \hat{w} \overline{\hat{w}^+}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{v} \overline{\hat{w}^+}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

où nous considérons que les variations du champ de base sur les bords sont nulles. Étudions maintenant la répartition spatiale des fonctions de sensibilité associées au mode de coin et au mode TS le plus instable. Ces dernières sont illustrées à titre d'exemple pour  $Re_x = 8 \times 10^4$  et  $\alpha = 0.18$ . Nous pouvons remarquer que celle relative au mode de coin est fortement localisée au niveau de l'intersection des deux plaques, c'est-à-dire où l'incertitude liée au champ de base est la plus forte. Par comparaison, la fonction de sensibilité du mode TS possède un maximum proche de la paroi, loin du coin. En outre, l'amplitude de cette dernière se situe à un ordre de grandeur plus faible que celle associée au coin. Par conséquent, le mode de coin apparaît plus sensible aux variations du champ de base, et notamment où les incertitudes sont les plus grandes. Ainsi, il semble intéressant d'évaluer la déviation optimale du champ de base pouvant conduire à une déstabilisation de celui-ci.

### 3.2 Variation optimale : instabilité liée à un mécanisme inflexionnel

Nous concentrons maintenant notre analyse à une optimisation du taux d'amplification du mode de coin en fonction d'une faible variation de  $\mathbf{U}_{ref}$  : le champ de base issu des équations de similitude. Nous utilisons une fois encore une méthode variationnelle [5]. Introduisons tout d'abord un petit paramètre caractérisant une déviation du champ de base :

$$r^2 = \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} (U - U_{ref})^2 + (V - V_{ref})^2 + (W - W_{ref})^2 dy dz \quad (8)$$

Introduisons maintenant la fonctionnelle Lagrangienne :

$$\mathcal{H}(\mathbf{U}, \lambda) = Im(\Omega)(\mathbf{U}) - \lambda \left( r^2 - \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} (U - U_{ref})^2 + (V - V_{ref})^2 + (W - W_{ref})^2 dy dz \right) \quad (9)$$

où nous forçons l'intensité de la déviation du champ de base à travers le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . Nous souhaitons alors optimiser  $Im(\Omega)$ , le taux d'amplification temporelle, en fonction de la variable de contrôle  $\mathbf{U}$ .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}(\mathbf{U} + \varepsilon \delta \mathbf{U}, \lambda) - \mathcal{H}(\mathbf{U}, \lambda)}{\varepsilon} \quad (10)$$

ainsi

$$\delta Im(\Omega)(\mathbf{U}) - \lambda \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} 2\delta U (U - U_{ref}) + 2\delta V (V - V_{ref}) + 2\delta W (W - W_{ref}) dy dz = 0 \quad (11)$$

De ce fait, en considérant la valeur de  $\mathbf{G}_\mathbf{U}$  définie précédemment (7), le gradient de  $\mathcal{H}$  par rapport au contrôle  $\mathbf{U}$  est :

$$Im(\mathbf{G}_\mathbf{U}) - 2\lambda(\mathbf{U} - \mathbf{U}_{ref}) \quad (12)$$

$$\text{avec } \lambda = \sqrt{\frac{1}{4r^2} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} Im(G_U)^2 + Im(G_V)^2 + Im(G_W)^2 dy dz}.$$

Par conséquent, la valeur de  $\mathbf{U}$  optimisant le taux d'amplification est obtenu par une procédure itérative basée sur un algorithme de gradient dont la descente est donnée par la valeur du gradient de la fonction objectif et le pas est fixé. Moins de 10 itérations sont nécessaires à la convergence. Un exemple d'optimisation est illustré à  $Re_x = 8 \times 10^4$ ,  $\alpha = 0.18$  pour le mode de coin à travers le spectre et les variations résultantes du champ de base (voir figures 5(a), 5(b) et 5(c)). Nous pouvons observer qu'une faible variation de  $\mathbf{U}$  permet de déstabiliser le mécanisme associé au mode de coin. En outre, les modes TS paraissent peu affectés par l'optimisation. Ce dernier point est en accord avec les fonctions de sensibilité relatives aux deux modes, où les zones actives respectives sont fortement dissociées. Enfin, la variation optimale du champ de base pour  $r^2 = 2 \times 10^{-7}$  est illustrée sur la figure 5. Cette dernière, très localisée au niveau de l'intersection est en accord avec la fonction de sensibilité (voir figures 5(c) et 5(b)). Nous pouvons remarquer que la position de la variation optimale de  $U$  le long de la bissectrice se situe au niveau du point d'inflexion (figure 5(d)). Cette dernière corrobore l'influence d'un mécanisme inflexionnel intervenant dans la déstabilisation du mode de coin.

Un balayage dans l'espace des paramètres  $(r, Re_x, \alpha)$  permet alors de tracer une courbe neutre, distinguant les zones stables et instables en fonction de  $(r, Re_x)$  pour ce mode spécifique. Le résultat est illustré sur la figure 6. Il apparaît alors que le mécanisme associé au mode de coin est déstabilisant pour une faible déviation et que le nombre de Reynolds critique associé à ce dernier est fortement diminué, atteignant une valeur de  $10^4$  pour  $r \approx 0.01$ .

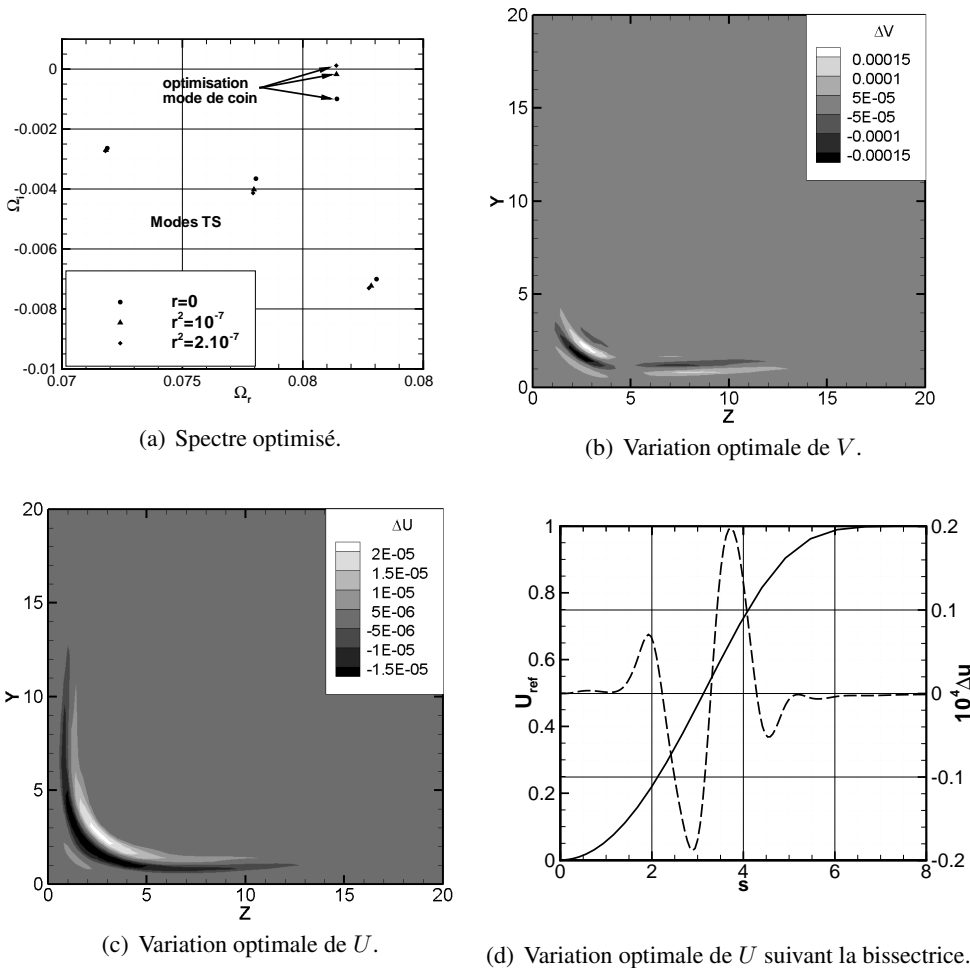


FIG. 5 – Optimisation du mode de coin pour  $Re_x = 8 \times 10^4$  et  $\alpha = 0.18$ . La position suivant la bissectrice est désignée par  $s$ .

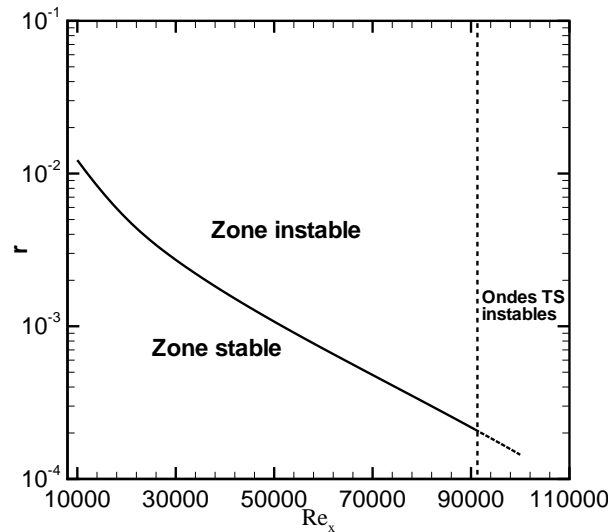


FIG. 6 – Courbe neutre dans l'espace des paramètres  $(r, Re_x, \alpha)$ .

## 4 Conclusion

Une étude des fonctions de sensibilité relatives aux ondes TS et au mode de coin révèle la forte sensibilité au champ de base de celui-ci au niveau de l'intersection. Une technique d'optimisation appliquée au mode de coin met ainsi en évidence l'influence d'une faible déviation du champ de base au niveau de la zone d'incertitude de ce dernier. Il illustre en particulier la possibilité de déstabiliser l'écoulement de coin pour des nombres de Reynolds se situant un ordre de grandeur plus bas que le nombre de Reynolds critique associé à la classique couche limite de Blasius. Une hypothèse, associée au déclenchement d'une instabilité via un mécanisme non-visqueux, peut ainsi être émise pour expliquer les résultats expérimentaux.

## Références

- [1] Zamir M. Similarity and stability of the laminar boundary layer in a streamwise corner. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 377, 269–288, 1981.
- [2] Rubin S. and Grossman B. Viscous flow along a corner : numerical solution of the corner layer equations. *Quart. Appl. Math.*, 24, 169–186, 1971.
- [3] Parker S. and Balachandar S. Viscous and Inviscid Instabilities of Flow Along a Streamwise Corner. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 13, 231–270, 1999.
- [4] Balachandar S. and Malik M. Inviscid instability of streamwise corner flow. *J. Fluid Mech.*, 282, 187–201, 1995.
- [5] Bottaro A., Corbett P., and Luchini P. The effect of base flow variation on flow stability. *J. Fluid Mech.*, 476, 293–302, 2003.
- [6] Marquet O., Sipp D., and Jacquin L. Sensitivity analysis and passive control of cylinder flow. *J. Fluid Mech.*, 615, 221–252, 2008.